c) $\overrightarrow{BH}$ est un vecteur normal au plan (ACF) donc la droite (BH) est perpendiculaire à (ACF).

$N(x,y,z)\in(BH)\cap(ACF)\Leftrightarrow\begin{cases}x=1-\alpha\\y=\alpha\\z=\alpha\\-x+y+z=0\end{cases}$ $d'où\ -1+\alpha+\alpha+\alpha=0\Leftrightarrow\alpha=\frac{1}{3}\Rightarrow N\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

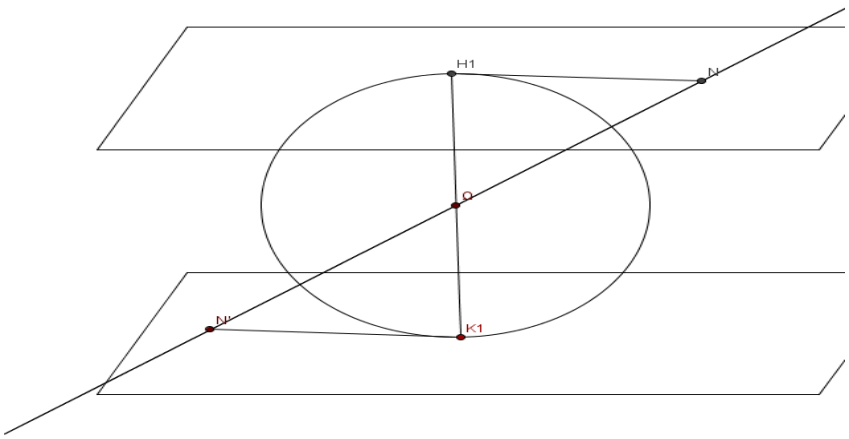
2) K=F*G, G(1,1,1) et $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AE}\Rightarrow K\left(1,\frac{1}{2},1\right)$; h l'homothétie de centre K et de rapport $\frac{1}{3}$.

a) P est le centre de gravité du triangle HGF et K=F*G donc $\overrightarrow{KP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{KH}$ $d'où\ h(H)=P$ de même h(B)=Q.

b) $h:M(x,y,z)\mapsto M'(x',y',z')\Rightarrow\begin{cases}x'=kx+(1-k)a\\y'=ky+(1-k)b\\z'=kz+(1-k)c\end{cases}$ $avec\ k=\frac{1}{3}\ et(a,b,c)=\left(1,\frac{1}{2},1\right)$. Donc $\begin{cases}x'=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}\\y'=\frac{1}{3}y+\frac{1}{3}\\z'=\frac{1}{3}z+\frac{2}{3}\end{cases}$.

3) a) $\begin{cases}h(ACF)=(R)\\(BH)\perp(ACF)\ au\ point\ N\\h((BH))=(PQ)\end{cases}$, donc (PQ) est perpendiculaire au plan (R) au point N'=h(N).

$\begin{cases}N'=h(N)\\N\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)\end{cases}$ $donc\ N'\left(\frac{8}{9},\frac{4}{9},\frac{7}{9}\right)$.



b) Soit Ω le centre d'une sphère tangente à (R) et (ACF) en H et K (respectivement) et R son rayon.

$\Omega\in(NN')$ alors les triangles $\Omega KN'$ $et\ \Omega HN$ sont isométriques donc Ω est le milieu de [NN']

$\Rightarrow\Omega\left(\frac{7}{9},\frac{7}{18},\frac{5}{9}\right)$. (S) est tangentes à (ACF)

$\Rightarrow R=d(\Omega,(ACF))=\frac{\left|-\frac{7}{9}+\frac{7}{18}+\frac{5}{9}\right|}{\sqrt{3}}=\frac{3}{18\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{18}\Rightarrow(S):\left(x-\frac{7}{9}\right)^2+\left(y-\frac{7}{18}\right)^2+\left(z-\frac{5}{9}\right)^2=\frac{1}{108}$.

<u>2ième méthode :</u> Une représentation paramétrique de (NN') est $\begin{cases}x=\frac{2}{3}+2\beta\\y=\frac{1}{3}+\beta\\z=\frac{1}{3}+4\beta\end{cases}$ $(\beta\in\mathbf{R})$ $\begin{cases}(R)//(ACF)\\N'\in(R)\end{cases}$

$\Rightarrow(R):-x+y+z-\frac{1}{3}=0$. $d(\Omega,(ACF))=d(\Omega,(R))\Rightarrow\sqrt{3}|\alpha|=\frac{\left|3\alpha-\frac{1}{3}\right|}{\sqrt{3}}$ $donc\ \alpha=\frac{1}{18}\Rightarrow\Omega\left(\frac{7}{9},\frac{7}{18},\frac{5}{9}\right)$.

<u>Exercice N°16</u> Dans un cube ABCDEFGH, on désigne par I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [GH]. K désigne le centre de la face BCGF. Les calculs seront effectués dans le repère orthonormé $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

Devoir.th
Toutes les matières, tous les niveaux...